Раздел 3. Тема 4. Занятие 1.

Пусть функция $f(z)$ однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$ и пусть в каждой точке $z_0 \in D$ имеет место сохранение углов по величине и по направлению отсчета между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0, и их образами при отображении f и имеет место постоянство растяжения по всем направлениям, выходящим из точки z_0. Тогда отображение $w = f(z)$ называется конформным в области D.

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки z_0, в которой отображение $w = f(z)$ является конформным.

Аналогично можно определить понятие конформного отображения для областей из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Углом между кривыми, пересекающимися в точке $z = \infty$, назовем угол между образами этих кривых при отображении $\xi = \frac{1}{z}$ в точке $\xi = 0$.

Таким образом, если функция $f(z)$ однолистна в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и в каждой точке $z_0 \in D$ имеет место консерватизм углов, а в каждой конечной точке из D – постоянство растяжения и точка $z = \infty$ является полюсом порядка не выше первого, то отображение f конформно.

Отображение, обратное к конформному, является конформным и суперпозиция конформных отображений является также конформным отображением.

Если функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$ и не равна тождественно постоянной, то образ области D при отображении f также является областью. Если еще предположить, что функция $f(z)$ однолистна в области D, то производная $f'(z) \neq 0$ всюду в D.

Основные принципы конформных отображений. Взаимная однозначность.

Функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $D \subset \mathbb{C}$ на область $G \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ однолистна и аналитична в области D. Если область D неограничена, т.е. $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ однолистна в D и аналитична в D всюду, кроме, быть может, одной точки, в которой она имеет полюс первого порядка.

Принцип соответствия границ.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D и непрерывна вплоть до ее границы γ, являющейся кусочно-гладкой кривой. Если $f(z)$ отображает взаимно однозначно кривую γ на кусочно гладкую замкнутую кривую Γ с сохранением обхода, то функция $f(z)$ конформно отображает область D на $\mathrm{int}\,\Gamma$. С другой стороны, если функция $f(z)$ конформно отображает область D на область G, то функцию $f(z)$ можно непрерывно продолжить на замыкание $\overline{D}$ области D так, что $f(z)$ будет отображать границу области D на границу области G взаимно однозначно и с сохранением обхода.

Элементарные функции и их конформные отображения:

① $w = az+b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$.

ⓐ $w = z+b$

$$\left.\begin{aligned} w &= u+iv \\ z &= x+iy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u = x+b_1 \\ v = y+b_2 \end{cases}$$ параллельный перенос осей координат.

ⓑ $w = e^{i\alpha} z$

$$\left.\begin{aligned} |w| &= |z| \\ \arg w &= \arg z + \alpha \end{aligned}\right\}$$ точка z переходит в w при помощи поворота вектора z около начала координат на угол α.

ⓑ $w = rz$

$$\left.\begin{aligned} |w| &= r|z| \\ \arg w &= \arg z \end{aligned}\right\}$$ преобразование подобия.

значит $w = az+b = re^{i\alpha} z + b \Rightarrow$ поворот на угол α, изменение в r раз затем параллельный перенос.

② $w = \dfrac{1}{z}$

$$\left.\begin{aligned} z &= x+iy = re^{i\varphi} \\ w &= \rho e^{i\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{1}{r} \\ \theta = -\varphi \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} r' = \dfrac{1}{r} \\ \varphi' = \varphi \end{cases} \text{ затем } \begin{cases} \rho = r' \\ \theta = -\varphi' \end{cases}}_{\text{инверсия}}$$

③ $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cz+d)}$ – это конформное отображение.

Если z описывает окружность, то w описывает окружность или прямую. И наоборот, если z описывает прямую, то w описывает прямую или окружность. Действительно, функция ① обладает этим свойством. Покажем для функции ②:

$$A(x^2+y^2)+mx+ny+l=0 \quad , \; A=0 - \text{прямая}$$

$$Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0, \text{ где } A, C \in R$$

$$A\frac{1}{w\bar{w}}+\frac{\bar{B}}{w}+\frac{B}{\bar{w}}+C=0 \Rightarrow A+\bar{B}\bar{w}+Bw+Cw\bar{w}=0 - \text{окружность},$$

для $C=0$ – прямая.

Раздел 3. Тема 4. Занятие 2.

Дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$.

① $\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$, если $z \neq -\frac{d}{c}$, $z \neq \infty$ ⇒ консерватизм углов.

В бесконечно удаленной точке углы сохраняются, ибо $z = \frac{1}{z'}$ ⇒ имеем $w = \frac{a+bz'}{c+dz'}$ и в $z'=0$ есть аналитическая функция, если $c \neq 0$ и $\frac{dw}{dz'} = -\frac{ad-bc}{c^2} \neq 0$. Если $c=0$, то имеем линейную функцию $w = \frac{az+b}{d}$.

Далее, имеем $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$ ⇒ отображение состоит из последовательных применений линейного отображения и инверсии.

② Если точка z описывает окружность, то точка w описывает окружность или прямую. Если же точка z описывает прямую линию, то w описывает прямую или окружность. Этот факт следует из того, что при всех преобразованиях, слагающих отображение w, окружность переходит в окружность (прямую считаем окружностью бесконечно большого радиуса).

③ Точки M и M^* называются симметричными относительно окружности радиуса R с центром в точке O, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O и $|OM| \cdot |OM^*| = R^2$.

При дробно-линейном отображении w точки, симметричные относительно окружности или прямой, переходят в точки, симметричные относительно образа этой прямой или окружности.

④ Существует единственное дробно-линейное отображение w, которое три различные точки z_1, z_2, z_3 переводит в три различные точки w_1, w_2, w_3. Это отображение определяется формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Оно задает конформное отображение круга, граница которого проходит через точки z_1, z_2, z_3, на круг, граница которого проходит через точки w_1, w_2, w_3. Под кругом понимается внутренность или внешность окружности, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой, если же три точки лежат на прямой L, то круг — это полуплоскость с границей L.

⑤ Отображение круга на верхнюю полуплоскость.

Найдем преобразование, которое переводило бы круг с центром в нулевой точке единичного радиуса в верхнюю полуплоскость. Ищем его в виде

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

Точки 0 и ∞ являются симметричными относительно окружности $|z|=1$ соответствующие им точки $z=\frac{b}{d}$ и $z=\frac{a}{c}$ должны быть симметричными относительно действительной оси, т.е. полагая $\frac{b}{d}=\beta$, имеем $\frac{a}{c}=\bar{\beta}$. Поэтому

$$w = \frac{\bar{\beta}z+\beta\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}$$

Далее, положим $w=0 \Rightarrow \bar{\beta}z+\beta\frac{d}{c}=0 \Rightarrow \bar{\beta}z=-\beta\frac{d}{c} \Rightarrow$

$$|\bar{\beta}|\cdot|z| = |-\beta|\cdot\left|\frac{d}{c}\right| \Rightarrow \left|\frac{d}{c}\right|=1 \Rightarrow \frac{d}{c}=e^{i\alpha} \Rightarrow$$

$$w = \frac{\bar{\beta}z+e^{i\alpha}\beta}{z+e^{i\alpha}}$$

⑥ Отображение верхней полуплоскости на круг единичного радиуса осуществляется аналогично.

⑦ Отображение круга самого в себя.

Пусть дан круг с центром в нуле единичного радиуса. Предположим, что при отображении круга $|z|\le 1$ на круг $|w|\le 1$ точка $z=\alpha$ ($\alpha\ne 0, |\alpha|<1$) переходит в нулевую точку $w=0$. Точка симметричная с $w=0$ относительно окружности $|w|=1$ будет $w=\infty$. Тогда имеем $w=\infty$ при $z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$.

Искомое преобразование:

$$w = k\,\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}, \quad k=\mathrm{Const}.$$

или

$$w = k\bar{\alpha}\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1} = k'\,\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

Из того что $|1-\bar{\alpha}z| = \left|\frac{1}{z}-\bar{\alpha}\right| = |\bar{z}-\bar{\alpha}| = |z-\alpha| \Rightarrow$ при $|z|=|w|=1$ получаем $|k'|=1 \Rightarrow k'=e^{i\theta} \Rightarrow$

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \qquad (*)$$

Полученный результат распространяется и на случай $\alpha=0$.

Окончательно, требуемое преобразование имеет вид (*) при $|\alpha| < 1$; если $|\alpha| > 1$, то формула (*) переводит внутренность круга $|z| \le 1$ во внешнюю часть круга $|w| \le 1$.

Семинар 13

(13.39) Установить общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$:

1) на верхнюю полуплоскость $\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w>0\}$,

3) на нижнюю полуплоскость $\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w<0\}$.

Пусть $w=\frac{az+b}{cz+d}$, $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$, $d=d_1+id_2$ и $z=x+iy$, $w=u+iv$. По условию $z=x\xrightarrow{f} w=u \Rightarrow$

$$\frac{(a_1+ia_2)x+(b_1+ib_2)}{(c_1+ic_2)x+(d_1+id_2)}=\frac{(a_1x+b_1)+i(a_2x+b_2)}{(c_1x+d_1)+i(c_2x+d_2)}=$$

$$=\frac{[(a_1x+b_1)+i(a_2x+b_2)]\cdot[(c_1x+d_1)-i(c_2x+d_2)]}{(c_1x+d_1)^2+(c_2x+d_2)^2}=u \Rightarrow$$

$$(a_1x+b_1)(c_2x+d_2)-(a_2x+b_2)(c_1x+d_1)=0 \Rightarrow$$

$$0=(a_1c_2-a_2c_1)x^2+(a_1d_2+b_1c_2-a_2d_1-b_2c_1)x+(b_1d_2-b_2d_1) \quad \forall x$$

$$\begin{cases} a_1c_2-a_2c_1=0 & \Rightarrow \frac{a_2}{a_1}=\frac{c_2}{c_1}=t \\ b_1d_2-b_2d_1=0 & \Rightarrow \frac{b_2}{b_1}=\frac{d_2}{d_1}=s \\ (a_1d_2-a_2d_1)+(b_1c_2-b_2c_1)=0 & \Rightarrow (a_1d_1-b_1c_1)(s-t)=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} s=t \\ a_1d_1-b_1c_1=0 \end{array}\right.$$

По определению дробно-линейного отображения w : $ad-bc\neq 0$

В случае $a_1d_1-b_1c_1=0$ имеем $ad-bc=(a_1d_1-b_1c_1)(1+it)(1+is)=0$, что противоречиво. В случае $s=t$ имеем $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}=\frac{d_2}{d_1}=t \Rightarrow$

$$a=(1+it)a_1,\ b=(1+it)b_1,\ c=(1+it)c_1,\ d=(1+it)d_1 \Rightarrow$$

$w=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ или $w=\frac{az+b}{cz+d}$, где $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Поскольку $w'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ и при обходе границы области и ее образа сами область и ее образ должны оставаться слева, то в случае 1) имеем неравенство $w'>0 \Rightarrow ad-bc>0$.

Имеем окончательно $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ и $ad-bc>0$.

В случае 3) имеем неравенство $w'<0 \Rightarrow ad-bc<0$

Окончательно находим $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ и $ad-bc<0$.

2) на правую полуплоскость $\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} w>0\}$,

4) на левую полуплоскость $\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} w<0\}$.

В случае 2) сначала при помощи дробно-линейного преобразования $w_1 = \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $ad-bc>0$ переведем верхнюю полуплоскость $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w_1\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w_1>0\}$. Затем совершим поворот на угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$:

$$w = e^{-i\frac{\pi}{2}} w_1 = -i\,\frac{az+b}{cz+d} = i\,\frac{(-a)z+(-b)}{cz+d} \Rightarrow$$

$$w = i\,\frac{az+b}{cz+d}, \text{ где } a,b,c,d\in\mathbb{R} \text{ и } ad-bc<0.$$

В случае 4) сначала при помощи дробно-линейного преобразования $w_1 = \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $ad-bc>0$ переведем верхнюю полуплоскость $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w_1\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w_1>0\}$. Затем совершим поворот на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$w = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1 = i\,\frac{az+b}{cz+d}, \text{ где } a,b,c,d\in\mathbb{R} \text{ и } ad-bc>0.$$

13.41 Найти дробно-линейное отображение, переводящее:

1) $z:\ -1 \to 0\ : w$ $\qquad w = \frac{az+b}{cz+d}$

$i \to 2i$

$(1+i) \to (1-i)$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{-a+b}{-c+d} \\ 2i = \dfrac{ai+b}{ci+d} \\ (1-i) = \dfrac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d} \end{cases} \Rightarrow \overset{a=b}{\begin{cases} -2c+2id = (1+i)a \\ 2c+(1-i)d = (2+i)a \end{cases}} \Rightarrow (1+i)d = (3+2i)a \Downarrow d = \frac{5-i}{2}a \Rightarrow$$

$$c = 2ia \Rightarrow w = \frac{az+a}{2iaz+\frac{5-i}{2}a} = 2\frac{z+1}{4iz+5-i} \Rightarrow$$

$$w = -2i\frac{z+1}{4z-1-5i}$$

2) $z: \quad -1 \longrightarrow i$

$\quad i \longrightarrow \infty \qquad w = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$\quad (1+i) \longrightarrow 1$

Имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{cases} i = \dfrac{-a+b}{-c+d} \longrightarrow -ci+di = -a+b \\ \infty = \dfrac{ai+b}{ci+d} \longrightarrow d = -ci \\ 1 = \dfrac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d} \longrightarrow c(1+i)+d = a(1+i)+b \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1-i)c = -a+b \\ c = a(1+i)+b \end{cases} \Rightarrow ic = (2+i)a \Rightarrow c = (1-2i)a \Rightarrow$$

$$b = -3ia \Rightarrow d = -(2+i)a \Rightarrow$$

$$w = \frac{az-3ia}{(1-2i)az-(2+i)a} = \frac{z-3i}{(1-2i)z-(2+i)} \Rightarrow$$

$$w = \frac{z-3i}{(1-2i)z-(2+i)}.$$

3) $z: \quad -1 \longrightarrow i \quad : w$

$\quad \infty \longrightarrow 1 \qquad w = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$\quad i \longrightarrow (1+i)$

Имеем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} i = \dfrac{-a+b}{-c+d} \Rightarrow -ic+id=-a+b \\ 1 = \dfrac{a\infty+b}{c\infty+d} \Rightarrow \dfrac{a}{c}=1 \Rightarrow a=c \\ 1+i = \dfrac{ai+b}{ci+d} \qquad (-1+i)c+(1+i)d=ai+b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1-i)a+id=b \\ -a+(1+i)d=b \end{array}\right. \Rightarrow d=(2-i)a \Rightarrow b=(2+i)a \Rightarrow$$

$$w=\frac{\cancel{a}z+(2+i)\cancel{a}}{\cancel{a}z+(2-i)\cancel{a}} \Rightarrow w=\frac{z+2+i}{z+2-i}.$$

4) $z:\ -1 \longrightarrow \infty$

$\infty \longrightarrow i \qquad w=\dfrac{az+b}{cz+d}.$

$i \longrightarrow 1$

Имеем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \infty = \dfrac{-a+b}{-c+d} \Rightarrow d=c \\ i = \dfrac{a\infty+b}{c\infty+d} \Rightarrow \dfrac{a}{c}=i \\ 1 = \dfrac{ai+b}{ci+d} \Rightarrow ic+d=ai+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=c \\ a=ic \\ b=(2+i)c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$w=\frac{i\cancel{c}z+(2+i)\cancel{c}}{\cancel{c}z+\cancel{c}} \Rightarrow w=\frac{iz+2+i}{z+1}.$$

13.46 Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0\}$ на единичный круг $\{w\in\mathbb{C}: |w|\le 1\}$ так, чтобы:

1) $w(i)=0$, $\arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$.

Для дробно-линейного отображения $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ имеем симметричные точки:

$$z: \quad i \longrightarrow -i$$
$$\downarrow$$
$$w: \quad 0 \longrightarrow \infty$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{ai+b}{ci+d} \\ \infty = \dfrac{-ai+b}{-ci+d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -ai \\ d = ci \end{cases} \Rightarrow w = \frac{az-ai}{cz+ci} = \frac{a}{c}\cdot\frac{z-i}{z+i}$$

Точка $z=0$ переходит в $|w|=1 \Rightarrow \left|\frac{a}{c}\right| = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-i}{z+i} \rightarrow w'(z) = e^{i\varphi}\frac{2i}{(z+i)^2} \Rightarrow$$

$$w'(i) = -\frac{i}{2}e^{i\varphi} = \frac{1}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \varphi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

2) $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$.

Для дробно-линейного отображения $w = \frac{az+b}{cz+d}$ имеем симметричные точки:

$$z: \quad 2i \longrightarrow -2i$$
$$\downarrow$$
$$w: \quad 0 \longrightarrow \infty$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{2ai+b}{2ci+d} \\ \infty = \dfrac{-2ai+b}{-2ci+d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2ai \\ d = 2ci \end{cases} \Rightarrow w = \frac{az-2ai}{cz+2ci} = \frac{a}{c}\cdot\frac{z-2i}{z+2i}$$

Точка $z=0$ переходит в $|w|=1 \Rightarrow \left|\frac{a}{c}\right| = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-2i}{z+2i} \Rightarrow w'(z) = e^{i\varphi}\frac{4i}{(z+2i)^2} \Rightarrow$$

$$w'(2i) = -\frac{i}{4}e^{i\varphi} = \frac{1}{4}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \varphi - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$w = i\,\frac{z-2i}{z+2i}.$$

(1350) Отобразить конформно внутренность единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на внутренность единичного круга $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ так, чтобы:

1) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Для дробно-линейного отображения $w = \frac{az+b}{cz+d}$ имеем симметричные точки:

$$z: \quad \frac{1}{2} \longrightarrow 2$$
$$w: \quad 0 \longrightarrow \infty$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\frac{a}{2}+b}{\frac{c}{2}+d} \\ \infty = \dfrac{2a+b}{2c+d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ d = -2c \end{cases} \Rightarrow w = \frac{-2bz+b}{cz-2c} = -\frac{b}{c}\,\frac{2z-1}{z-2}$$

Переведем границу круга $|z|=1$ на границу круга $|w|=1 \Rightarrow$

$$z\bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow 1 = |w| = \left|\frac{b}{c}\right| \cdot \frac{|z|\,|2-\frac{1}{z}|}{|z-2|} = \left|\frac{b}{c}\right| \cdot \frac{|2-\bar{z}|}{|z-2|} =$$

$$= \left|\frac{b}{c}\right| \cdot \frac{|\overline{z-2}|}{|z-2|} = \left|\frac{b}{c}\right| \Rightarrow \left|\frac{b}{c}\right| = 1.$$

По другому, возьмем точку $z=1$, $|z|=1$. Для нее $|w|=1 \Rightarrow \left|\frac{b}{c}\right| = 1$

$$\frac{b}{c} = e^{i\varphi} \Rightarrow w = -e^{i\varphi}\frac{2z-1}{z-2} \Rightarrow w'(z) = e^{i\varphi}\frac{3}{(z-2)^2} \Rightarrow$$

$$w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}e^{i\varphi} \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow w(z) = -\frac{2z-1}{z-2}.$$

2) $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0$, $w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Для дробно-линейного отображения $w = \frac{az+b}{cz+d}$ имеем симметричные точки:

$$z:\ \frac{i}{2} \longrightarrow 2i$$
$$\downarrow$$
$$w:\ 0 \longrightarrow \infty$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\frac{ai}{2}+b}{\frac{ci}{2}+d} \\ \infty = \dfrac{2ai+b}{2ci+d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2bi \\ d = -2ci \end{cases} \Rightarrow w = \frac{2biz+b}{cz-2ci} = \frac{b}{c}\cdot\frac{2iz+1}{z-2i}$$

Переведем границу круга $|z|=1$ на границу круга $|w|=1 \Rightarrow$

$$z\bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow 1 = |w| = \left|\frac{b}{c}\right|\cdot\frac{|z|\,|2i+\frac{1}{\bar{z}}|}{|z-2i|} = \left|\frac{b}{c}\right|\cdot\frac{|\bar{z}+2i|}{|z-2i|} =$$

$$= \left|\frac{b}{c}\right|\cdot\frac{|\overline{z-2i}|}{|z-2i|} = \left|\frac{b}{c}\right| \Rightarrow \left|\frac{b}{c}\right| = 1.$$

По другому, возьмем точку $z=i$, $|z|=1$. Для нее $|w|=1 \Rightarrow \left|\frac{b}{c}\right|=1$

$$\frac{b}{c} = e^{i\varphi} \Rightarrow w = e^{i\varphi}\frac{2iz+1}{z-2i} \Rightarrow w'(z) = e^{i\varphi}\frac{3}{(z-2i)^2} \Rightarrow$$

$$w'\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{4}{3}e^{i\varphi} = \frac{4}{3}e^{i(\varphi+\pi)} \Rightarrow \varphi+\pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$w = -i\,\frac{2iz+1}{z-2i} = \frac{2z-i}{z-2i}$$

3) $w(0)=0$, $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$

Для дробно-линейного отображения $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ имеем симметричные точки:

$$z:\ 0 \longrightarrow \infty$$
$$\downarrow$$
$$w:\ 0 \longrightarrow \infty$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{b}{d} \\ \infty = \dfrac{a\infty+b}{c\infty+d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow w = \frac{az}{d} = \frac{a}{d}z.$$

Переведем границу круга $|z|=1$ на границу круга $|w|=1$ $\Rightarrow$

$$1=|w|=\left|\frac{a}{d}\right|\cdot|z|=\left|\frac{a}{d}\right| \rightarrow \left|\frac{a}{d}\right|=1 \Rightarrow \frac{a}{d}=e^{i\varphi}$$

$$w=e^{i\varphi}z \Rightarrow w'(z)=e^{i\varphi}$$

$$w'(0)=e^{i\varphi} \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow w=-iz.$$

13.69 Доказать, что регулярные ветви функции $w=\sqrt{z}$ конформно отображают плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по оси $[0;+\infty)$ соответственно на верхнюю и нижнюю полуплоскости.

Рассмотрим функцию $w=z^2$. Поскольку уравнение $w=z^2$ при $w\neq 0$, $w\neq\infty$ имеет два различных решения, то обратная функция $w=\sqrt{z}$ является двузначной.

Пусть D_0 – плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль оси $[0;+\infty)$. Если $z=\rho e^{i\varphi}$, то определим функцию $w=f_1(z)=\sqrt{\rho}\cdot e^{\frac{i\varphi}{2}}$, $0<\varphi<2\pi$. Эта функция является однозначной и непрерывной в области D_0, удовлетворяет равенству $f_1^2(z)=z$. Множество значений функции $f_1(z)$ есть верхняя полуплоскость. Это вытекает непосредственно из ее определения, а также того факта, что при отображении, обратным к $f_1(z)$, верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ переходит в плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль оси $[0;+\infty)$.

Таким образом, функция $f_1(z)$ однозначна и непрерывна в области D_0 и отображает конформно эту область на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$

Аналогично находим, что функция $w=f_2(z)=\sqrt{\rho}e^{\frac{i\varphi}{2}}$, $2\pi<\varphi<4\pi$, $f_2(z)=-f_1(z)$ также однозначна и непрерывна в области D_0, удовлетворяет равенству $f_2^2(z)=z$ и отображает область D_0 конформно на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$.

Функции $f_1(z), f_2(z)$ образуют однозначные дифференцируемые ветви двузначной функции $w=\sqrt{z}$.

(13.70) Найти конформный образ плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по оси $(-\infty;0]$, определяемый регулярными ветвями функции $w=\sqrt{z}$.

Рассмотрим область G_0 – плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль оси $(-\infty;0]$. Аналогично примеру 13.69 в этой области можно выделить две однозначные непрерывные ветви:

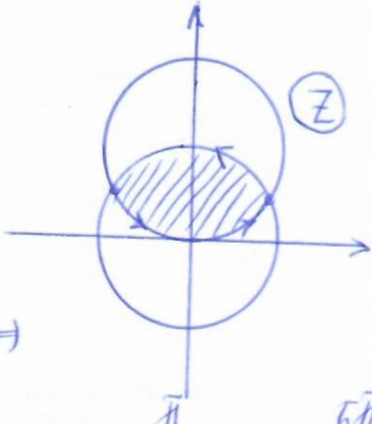
$$w=f_1(z)=\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\varphi}{2}},\ -\pi<\varphi<\pi,\ \text{где } z=\rho e^{i\varphi},$$

$$w=f_2(z)=\sqrt{\rho}\,e^{\frac{i\varphi}{2}},\ \pi<\varphi<3\pi,$$

где функция $w=f_1(z)$ отображает область G_0 на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$, а функция $w=f_2(z)=-f_1(z)$ переводит эту область на левую полуплоскость $\operatorname{Re} w<0$.

(13.74) Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} w>0\}$ следующие круговые "луночки":

1) $D_1=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1,\ |z-i|<1\}$



Находим граничные угловые точки, являющиеся точками пересечения окружностей $|z|=1$ и $|z-i|=1$. $z=e^{i\varphi} \Rightarrow 1=|e^{i\varphi}-i| \Rightarrow$

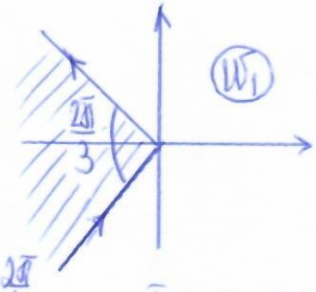
$$1=|\cos\varphi+i(\sin\varphi-1)|=\sqrt{2(1-\sin\varphi)} \Rightarrow \sin\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6} \text{ и } \varphi=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow$$

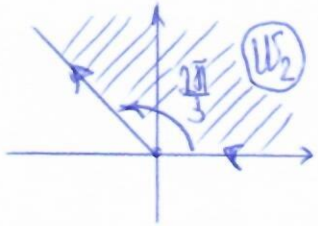
$$z_1=e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\quad z_2=e^{i\frac{5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

Строим теперь дробно-линейное отображение, переводящее точку z_2 в 0, а точку z_1 в ∞:

$$w_1=\frac{z+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}{z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}=\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}$$

Поскольку $w_1(0)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_1(i)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, то находим образ "луночки" D_1 в плоскости w_1:

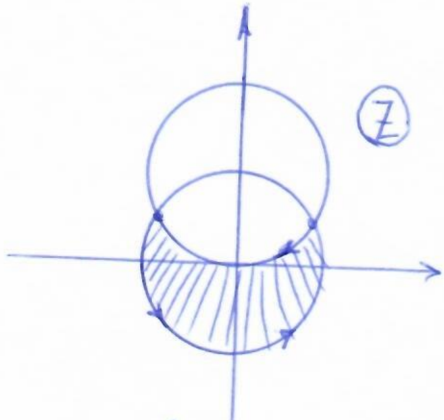




Далее $w_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} w_1$. После чего окончательно имеем $w = w_2^{\frac{3}{2}}$.

$$\Rightarrow \quad w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}.$$

2) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z|<1, |z-i|>1\}$



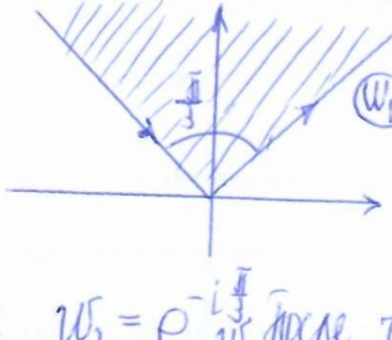
Граничные угловые точки "лунки" D_2 такие же, что и у "лунки" D_1:

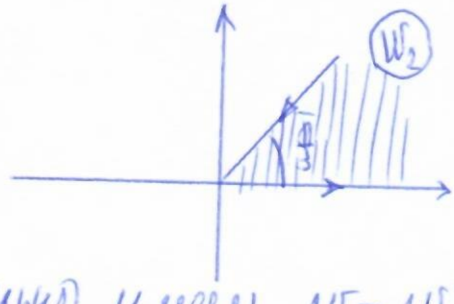
$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Снова строим дробно-линейное отображение, переводящее точку z_2 в 0, а точку z_1 в ∞:

$$w_1 = \frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}$$

Поскольку $w_1(0) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_1(-i) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, то находим образ "луночки" D_2 в плоскости w_1:





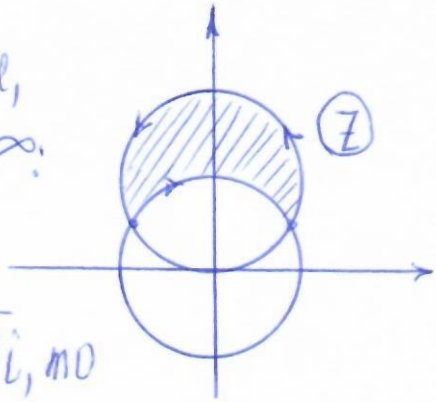
Далее $w_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} w_1$. После чего окончательно имеем $w = w_2^3$. $\Rightarrow$

$$w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$$

3) $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z|>1, |z-i|<1\}$.

Граничные угловые точки "лунки" D_3 такие же, что и у "лунки" D_1:

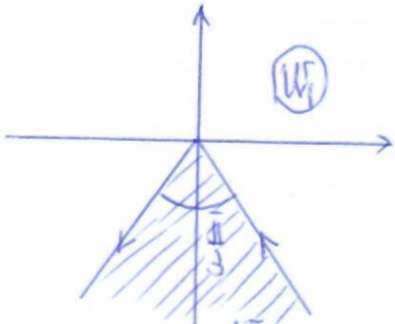
$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

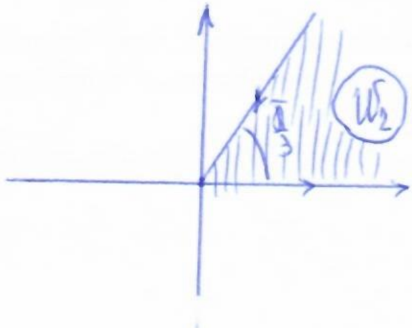


Снова строим дробно-линейное отображение, переводящее точку z_2 в 0, а точку z_1 в ∞:

$$w_1 = \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}.$$

Поскольку $w_1(i) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_1(2i) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, то находим образ "луночки" D_3 в плоскости w_1:





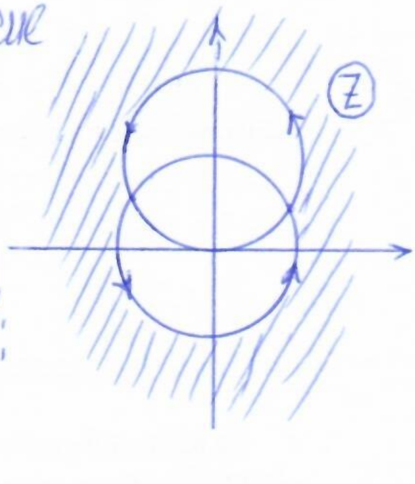
Далее $w_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} w_1$. После чего окончательно имеем $w = w_2^3 \Rightarrow$

$$w = \left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^3.$$

4) $D_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |z - i| > 1\}$

Граничные угловые точки "лунки" D_4 такие же, что и у "лунки" D_1:

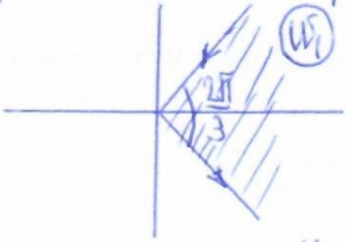
$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

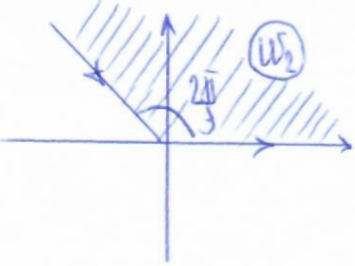


Снова строим дробно-линейное отображение, переводящее точку z_2 в 0, а точку z_1 в ∞:

$$w_1 = \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}.$$

Поскольку $w_1(2i) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_1(-i) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, то находим образ "луночки" D_4 в плоскости w_1:





Далее $w_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} w_1$. После чего окончательно имеем $w = w_2^{3/2} \Rightarrow$
$$w = i\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}.$$

(13.75) Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} w>0\}$ следующие области:

1) $\mathbb{C}\setminus[-1;1]$.

Рассмотрим функцию $w_1 = \frac{z+1}{z-1}$. Имеем $w_1(-1)=0$ и $w_1(1)=\infty$. Поскольку $w_1(0)=-1$, то функция w_1 отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль оси $(-\infty;0]$. Функция $w_2=-w_1$ отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль оси $(-\infty;0]$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль оси $[0;+\infty)$. Тогда искомое отображение имеет вид
$$w=\sqrt{w_2}=\sqrt{\frac{z+1}{1-z}}.$$

3) $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty;-R]\cup[R;+\infty)\}$.

Рассмотрим функцию $w_1=\frac{z+R}{z-R}$. Имеем $w_1(-R)=0$ и $w_1(R)=\infty$. Кроме того, луч $[R;+\infty)$ отображается на луч $[1;+\infty)$, а луч $(-\infty;-R]$ отображается на отрезок $[0,1)$. Таким образом, функция w_1 переводит указанное множество на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль оси $[0;+\infty)$. Значит, искомое отображение имеет вид
$$w=\sqrt{w_1}=\sqrt{\frac{z+R}{z-R}}.$$

5) $\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0\}\setminus[0,iR]$, $R>0$.

Функция $w_1=z^2$ отображает указанное множество на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $[-R^2;+\infty)$. Функция $w_2=w_1+R^2$ отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $[-R^2;+\infty)$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $[0;+\infty)$. Тогда, искомое отображение имеет вид
$$w=\sqrt{w_2}=\sqrt{z^2+R^2}.$$

2) $\mathbb{C} \setminus [z_1, z_2]$.

Рассмотрим линейную функцию $w_1 = az+b$ и потребуем, чтобы $w_1(z_1) = -1$, $w_1(z_2) = 1$. Для определения величин a и b получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = az_1 + b \\ 1 = az_2 + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{z_2 - z_1}, \quad b = -\frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1}.$$

Задача свелась к отображению плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ на верхнюю полуплоскость. Из 13.75,1) имеем

$$w = \sqrt{\frac{w_1+1}{1-w_1}} = \sqrt{\frac{az+b+1}{1-b-az}} = \sqrt{\frac{\frac{2z}{z_2-z_1} - \frac{z_2+z_1}{z_2-z_1} + 1}{1 + \frac{z_2+z_1}{z_2-z_1} - \frac{2z}{z_2-z_1}}} = \sqrt{\frac{z-z_1}{z_2-z}}.$$